



Universidade Federal de Santa Catarina

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Departamento de Física

Programa de Pós-graduação em Física

Dissertação de mestrado

# **Produção de Bósons Z em ordem dominante no LHC**

Mestrando: Gabriel Arthur Militzer

Orientador: Prof. Dr. Emmanuel Gräve de Oliveira

18 de novembro de 2016



Universidade Federal de Santa Catarina

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Departamento de Física

Dissertação de mestrado

# **Produção de Bósons $Z$ em ordem dominante no LHC**

Dissertação de mestrado submetida ao Departamento de Física da Universidade Federal de Santa Catarina, sob orientação do Prof. Dr. Emmanuel Gräve de Oliveira, como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Física.

Acadêmico: Gabriel Arthur Militzer

Orientador: Prof. Dr. Emmanuel Gräve de Oliveira

18 de novembro de 2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Militzer, Gabriel Arthur

Produção de Bósons Z em ordem dominante no LHC / Gabriel Arthur Militzer ; orientador, Emmanuel Gräve de Oliveira - Florianópolis, SC, 2016.

57 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Física.

Inclui referências

1. Física. 2. Produção de Bósons Vetoriais Massivos. 3. Teoria Quântica de Campos. 4. Partículas Elementares. 5. Partículas Elementares. I. de Oliveira, Emmanuel Gräve. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós Graduação em Física. III. Título.

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>5</b>
<b>Abstract</b>	<b>7</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>9</b>
<b>2 O Modelo Padrão e o Modelo de Pártons</b>	<b>15</b>
2.1 O Modelo Padrão . . . . .	15
2.1.1 Cromodinâmica Quântica – QCD . . . . .	16
2.1.2 Teoria Eletrofraca – EWT . . . . .	20
2.2 O Modelo de Pártons . . . . .	26
2.2.1 Espalhamento Profundamente Inelástico – DIS . . . . .	28
2.2.2 O Processo Drell–Yan . . . . .	30
<b>3 Produção de Bóson Z</b>	<b>33</b>
3.1 Regras de Feynman . . . . .	34
3.2 O Processo Drell–Yan em ordem dominante . . . . .	36
3.2.1 Cálculo do Elemento de Matriz Invariante . . . . .	36
3.2.2 Seção de Choque Partônica . . . . .	40
<b>4 Conclusão</b>	<b>45</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>49</b>
<b>Apêndice</b>	<b>55</b>



## Resumo

O Processo Drell–Yan é utilizado como exemplo para o estudo de produção do bóson massivo  $Z$  com o intuito de entender as interações envolvendo a Força Fraca assim como o estágio atual do nosso conhecimento a respeito da estrutura hadrônica. Para isso foi revisto o Modelo Padrão de Partículas Elementares dando destaque às suas principais características relevantes na formulação dos tópicos abordados, sendo elas o Confinamento, a Liberdade Assintótica, e o Teorema da Fatorização da QCD, e a Quiralidade da Teoria Fraca. Também são abordados alguns tópicos desenvolvidos ao longo do estudo da estrutura hadrônica que levaram ao desenvolvimento do Modelo de Pártons proposto por Feynman e que permite estudarmos a estrutura interna dos hádrons na forma das Funções de Distribuição de Pártons (PDFs) a partir do cálculo da seção de choque entre os constituintes dos prótons. Apresentados todos os conceitos é feito cálculo da seção de choque partônica do processo Drell–Yan através da aplicação das regras de Feynman.

**Palavras chave:** Produção de Bósons Vetoriais Massivos, Partículas Elementares, Modelo Padrão, Teoria Quântica de Campos, LHC, Teoria Fraca.



## Abstract

The Drell–Yan process is used as an example to study the production of the massive boson  $Z$  with the intent of learning about the interactions of the Weak force as well as our current understanding about the hadronic structure. For that the Standard Model of Elementary Particles is reviewed with emphasis on its main characteristics relevant to the covered topics, those being the Confinement, Asymptotic Freedom, and the Factorization Theorem of QCD, and the Quirality of the Weak Theory. Some topics developed through the study of the hadronic structure are also reviewed, finally leading to the Parton Model proposed by Feynman that allows us to study the inner structure of the hadrons in the form of Parton Distribution Functions (PDFs) from the evaluation of the cross section of its constituents. After the aforementioned concepts are covered the partonic cross section of the Drell–Yan process is computed using the Feynman rules.

**Key words:** Massive Vector Boson Production, Elementary Particles, Standard Model, Quantum Field Theory, LHC, Weak Theory.





# 1 Introdução

Parece haver na natureza humana um desejo por respostas, em conseguir explicar os fenômenos. Não nos contentamos em aceitar/admitir nossa ignorância e com frequência na falta de justificativas razoáveis acabamos recorrendo a "explicações" sobrenaturais. Entretanto, conforme as civilizações se desenvolveram e se reestruturaram, o mesmo pode ser dito a respeito do nosso conhecimento e da forma que percebemos o mundo, desde os primeiros filósofos até eventualmente a elaboração do método científico viemos aprimorando a forma com que buscamos compreender os fenômenos naturais. A física tem se mostrado ao longo da história uma excelente ferramenta nessa nossa busca por respostas, conseguindo descrever os fenômenos mais diversos a partir leis muito simples de simetrias (ou conservação) das quais os outros fenômenos mais complexos acabam por ser consequências inevitáveis.

Em todas as áreas da ciência, há sempre um horizonte: o limite entre o que compreendemos e o que está além do nosso conhecimento, sob o qual não podemos afirmar nem negar nada. É sob esta linha divisória que de fato a ciência acontece, é de onde podemos observar até que ponto a experiência que acumulamos consegue explicar os fenômenos a nossa volta e consequentemente seus limites. Aí fazemos a ciência: utilizando como ferramentas o que aprendemos até então, levantamos questionamentos, formulamos hipóteses, e finalmente as colocamos a prova por meio de experimentos e previsões. Quando acertamos, a obtenção desse novo conhecimento expande nosso horizonte, podemos ver mais longe, fazer novos questionamentos, e a regra até então tem sido que cada resposta obtida leve a formulação de diversas novas perguntas — talvez porque a área seja proporcional ao quadrado do raio, assumindo que o espaço dos conhecimentos corresponde a uma geometria euclidiana bidimensional, conforme essa analogia — e por vezes de uma nova resposta acaba nascendo todo um novo campo de pesquisa, até então completamente oculto atrás desse horizonte.

Um bom exemplo — pode-se argumentar que uma das perguntas mais fundamentais que podemos fazer — é a evolução do nosso entendi-

mento a respeito da natureza (origem) da matéria em sua forma mais primordial, buscando entender os princípios mais elementares que regem seu funcionamento. O conceito do *átomo*, cujo nome foi inspirado na ideia de uma hipotética parte indivisível das coisas, ao ser descoberto passou a ser associado não apenas a um conceito, mas também a algo material. Posteriormente descobrimos que este "objeto", que havíamos presumido ser indivisível, era na verdade composto por partes menores e separáveis — resolvemos manter seu nome, em detrimento da ideia que literalmente representa, talvez por ser uma forma de preservarmos parte da história da ciência, ou evitar confusão entre textos escritos em épocas diferentes, ou por costume.

Em nossa busca tentando encontrar a menor parte indivisível da matéria acabamos por dividi-la cada vez mais, revelando novas subestruturas. Hoje chamamos as partículas indivisíveis de *elementares* ou *fundamentais*, e a princípio esses são termos flexíveis, podendo ser atribuídos a diferentes estruturas dependendo da época. Nosso entendimento a respeito do átomo foi marcado por etapas, em cada uma um novo modelo revelou um pouco mais da "realidade" que vivemos. Estudos feitos com elementos radiativos inicialmente classificando diferentes tipos de radiação — de acordo com seu poder de penetração em objetos, e pelas trajetórias que percorriam quando sujeitos a um campo magnético [1, 2] — em raios  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , foram aos poucos nos fornecendo informações sobre como os núcleos atômicos eram formados e de que maneira se comportavam.

Com a descoberta do nêutron [3] em 1932 as partículas elementares conhecidas até então eram: o elétron, o próton e o nêutron, até novamente descobrimos que as duas últimas eram também partículas compostas. Nos anos seguintes, aos poucos outras partículas foram sendo descobertas, e então ao longo dos anos 50 e 60 com o desenvolvimento de aceleradores de partículas cada vez mais potentes, começaram a ser detectadas muitas novas partículas de forma muito rápida. Partículas fundamentais provavelmente devem ter pelo menos algumas características bastante similares entre si, afinal são os componentes mais elementares das interações físicas atuando diretamente em suas propriedades características como carga, spin, massa... E aparentemente essa não era uma característica compartilhada por esse conjunto, que ficou informalmente conhecido como *zoológico de partículas*, portando seria pouco provável que fossem todas elementares.

Buscando um modelo mais simples que pudesse explicar como poderiam ser compostas essas partículas, Gell-Mann [4] e Zweig [5] inde-

pendentemente, em 1964 propuseram a existência de 3 novas partículas fundamentais de spin  $1/2$  e de cargas elétricas iguais a  $1/3$  ou  $2/3$  da carga do elétron, as quais Gell-Mann chamou de quarks. Posteriormente outros 3 quarks foram adicionados ao modelo e classificados em 3 *gerações*, ou *famílias*, de partículas que diferem apenas pela sua massa. Seus nomes, também chamados de *sabores*, são:  $u$  (*up*),  $c$  (*charm*), e  $t$  (*top*);  $d$  (*down*),  $s$  (*strange*), e  $b$  (*bottom*). Combinando essas partículas em estados ligados de quark-antiquark (mésons) ou de três quarks (bárions) era possível descrever aquelas que já haviam sido detectadas assim como fazer previsões de outras novas partículas, como o bárion  $\Omega^-$  descoberto ainda em 1964 [6], composto por três quarks  $s$  (*strange*), marcando o sucesso da teoria dos quarks, que até hoje são entendidos como constituintes (partículas) elementares da matéria.

Algumas dessas partículas eram compostas por férmions no mesmo estado quântico, por exemplo o  $\Omega^-$  citado acima, violando a estatística de spin fermiônica — ou *princípio* de exclusão de Pauli. Para solucionar este problema foi proposta uma nova carga para os quarks, chamada de *carga de cor*, que poderia assumir três valores —  $r$  (*red*),  $g$  (*green*) e  $b$  (*blue*) — e deveria satisfazer a condição de que todas as partículas compostas por quarks teriam carga de cor total (soma das cargas de seus constituintes) neutra, caso contrário já teríamos observado suas interações. Estes estados compostos com carga de cor total neutra estão na verdade em um estado singleto de cor que resulta da composição das 3 cores possíveis nos *bárions* ou de uma cor e sua respectiva anti-cor nos *mésons*, os bárions e mésons formam o conjuntos dos *hádrons*. Para descrever as interações que mantém os quarks nesses estados ligados são necessárias as partículas mediadoras da interação, os *glúons* (8 ao todo), bósons que possuem duas dessas cargas sendo uma de cor e uma de anti-cor, e são suas próprias antipartículas.

O estudo das interações entre os glúons e quarks — ou *força forte*, uma das 4 forças fundamentais da natureza — daria origem a Cromodinâmica Quântica (QCD, da sigla em inglês), que revelou haver muito mais nos hádrons do que os 3 quarks (ou quark e antiquark) inicialmente imaginados, havia ali também um mar dinâmico de partículas e antipartículas interagindo o tempo todo, e a distribuição dessas partículas mostrou-se depender da energia na qual o hádron se encontrava. Passamos a nos referir a essa estrutura como *mar* ou *mar de quarks*, e aos outros como *quarks de valência* por caracterizarem os diferentes hádrons.

Outra interação fundamental é a *força fraca* ou *força nuclear fraca*,

responsável pelo decaimento radioativo das partículas. É de certa forma a interação mais abrangente e peculiar do modelo padrão. Não só é a interação da qual participam o maior número de partículas, excluindo-se apenas o fóton e os glúons, como também é a única que permite a mudança da carga, paridade, e sabor das partículas — característica pela qual a interação fraca também é chamada em inglês de *Quantum Flavordynamics* (QFD), por estudar a dinâmica de sabor entre as partículas. Também é a única que não forma estados ligados, as interações fracas são mediadas pelos bósons massivos (mais uma peculiaridade)  $W^\pm$  e  $Z^0$ , sendo de curtíssimo alcance. Nos decaimentos em que a carga elétrica da partícula inicial e final muda é necessário a participação de um dos bósons  $W^\pm$ , processos que são chamados de *interações de corrente carregada*, enquanto que o eletricamente neutro  $Z^0$  participa dos decaimentos sem mudança de carga, chamados *interações de corrente neutra*.

A Eletrodinâmica Quântica (QED) já estava bem estabelecida na década de 1950 e é a mais bem compreendida das interações fundamentais, o que é esperado pois além de ser matematicamente a mais simples de modelar é relativamente a mais intensa das interações que observamos usualmente, uma vez que a força forte acaba sendo "oculta" por seus estados ligados podendo ser observada apenas em escalas de distância muito pequenas — como será visto na seção 2.1.1 — dificultando seu estudo. A QED tem como principais características o seu longo alcance — uma consequência de ter como partícula mediadora um bóson sem massa, o fóton, de modo que a intensidade dos campos eletromagnéticos decresce proporcionalmente com a distância ao quadrado — e a conservação da carga elétrica das partículas envolvidas, uma vez que o fóton é eletricamente neutro e a carga elétrica global deve ser conservada.

Ao longo dos anos 60 e 70 foi desenvolvida a Teoria Eletrofraca (EWT) mostrando que em energias muito altas a Força Eletromagnética e a Força Fraca são unificadas numa única interação. Seus principais autores Weinberg, Glashow e Salam foram homenageados com o Prêmio Nobel de Física em 1979, no entanto muitos aspectos importantes na construção de suas bases teóricas foram contribuições de vários outros cientistas [7]. As interações eletromagnéticas e fracas podem então ser entendidas como duas manifestações de uma outra interação mais fundamental, a eletrofraca — de maneira análoga aos campos elétricos e magnéticos em relação ao eletromagnetismo. Essas duas manifestações se apresentam em escalas menores de energia como consequência de uma quebra de simetria presente na teoria, que ocorre na ordem dos

$\sim 100\text{GeV}$ , correspondente aos grupos  $SU(2) \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$ , onde  $U(1)_{EM}$  é o grupo associado ao eletromagnetismo, e  $U(1)_Y$  à Hipercarga  $Y_W$ , uma quantidade que é preservada em todas as interações do Modelo Padrão. A Hipercarga relaciona a carga elétrica com o (terceiro componente do) Isospin Fraco  $\tau_3$ , outra quantidade conservada, que agrupa os quarks e léptons em dupletos de isospin fraco  $\tau_3 = 1/2$ , conforme apresentado na Tabela 2.1.

Estas interações — QCD e EWT (QED + QFD) — formam um conjunto teórico chamado de Modelo Padrão que descreve 3 das 4 forças fundamentais que observamos, ficando de fora apenas a gravitação, sendo essa a mais fraca das 4. Nesse modelo as partículas elementares são divididas de acordo com seu spin em 2 grupos: os férmions (spin  $1/2$ ) e os bósons (spin 1 ou zero). Os férmions por sua vez são divididos de acordo com as interações a quais estão sujeitos — uma consequência dos tipos de cargas que possuem — em léptons, que interagem através da força eletrofraca, e quarks, que interagem pela força eletrofraca e forte. Os bósons de spin 1 também são chamados de *bósons de calibre* e são as partículas mediadoras das interações, e podem ou não interagir com partículas do mesmo tipo que eles. O bóson de Higgs, cuja existência se confirmou em 2012 nas medidas realizadas pelas colaborações ATLAS [8] e CMS [9], é o único de spin zero e é responsável pela origem da massa das outras partículas, não interagindo apenas com os glúons e o fóton. Um esquema das partículas do modelo padrão e suas interações é apresentado no capítulo seguinte na Fig. 2.1.

O modelo padrão é extremamente bem sucedido e é atualmente a melhor teoria que temos para a matéria, mas continuamos tentando revelar cada vez mais sua natureza. A melhor forma de fazermos isso é colidindo hádrons a altíssimas energias e observando as partículas que são produzidas nessas colisões. O LHC (*Large Hadron Collider*), é hoje o colisor de hádrons mais potente que temos, com um comprimento circular de 27 km na fronteira entre França e Suíça, é capaz de realizar colisões entre prótons a energias de até 13 TeV em 4 pontos ao longo de sua circunferência, onde estão localizados 4 dos seus experimentos principais.

Nesse trabalho será apresentado em parte o estágio atual do nosso conhecimento a respeito da estrutura hadrônica — especificamente do próton — e de como podemos fazer esse estudo. No capítulo 2 veremos com mais detalhes algumas características importantes do Modelo Padrão e discutiremos o Modelo de Pártons proposto por Feynmann como uma maneira para se investigar a distribuição dos componentes

internos dos hádrons. No capítulo 3 vamos utilizar o processo Drell–Yan como um exemplo para mostrar como as seções de choque hadrônicas e partônicas se relacionam entre si através das Funções de Distribuição de Pártons (PDFs, do inglês).

## 2 O Modelo Padrão e o Modelo de Pártons

Nesse capítulo, na seção 2.1 faremos uma revisão das principais características apresentadas pelas interações estudadas no Modelo Padrão, posteriormente na sessão 2.2 apresentaremos o Modelo de Pártons e como ele pode ser utilizado como uma ferramenta, entre o que sabemos do modelo padrão e os dados obtidos experimentalmente em colisores como o LHC, para estudar a estrutura dos prótons. Ao longo do trabalho em todos os cálculos apresentados estamos trabalhando no sistema natural de unidades sendo ( $c = 1 = \hbar$ ) adimensionais.

### 2.1 O Modelo Padrão

O modelo padrão é uma teoria de calibre não abeliana com grupo de simetria  $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ . Uma teoria de calibre (ou *de gauge*), na física, é uma teoria de campo na qual a ação da Lagrangiana é invariante sob algum grupo de transformações de simetria locais, essas simetrias estão relacionadas aos graus de liberdade da Lagrangiana. As transformações de simetria são descritas pela Álgebra de Lie dos geradores do grupo, que por sua vez dão origem aos respectivos campos. Quando os geradores da álgebra comutam entre si temos uma teoria *abeliana*, caso contrário a teoria é *não-abeliana*.

O modelo padrão é um conjunto teórico que descreve 3 das 4 interações fundamentais observadas na natureza, descritas pela Cromodinâmica Quântica (ou QCD da sigla em inglês) também chamada de Força Forte ou Força Nuclear Forte, a Eletrodinâmica Quântica (QED), e a Força Fraca ou Nuclear Fraca (QFD). Essas duas últimas são unificadas numa única interação em energias elevadas, que recebe o nome de Teoria Eletrofraca (EWT), com a diminuição da energia uma quebra de simetria ocorre em escalas da ordem de  $\sim 100$  GeV dando origem as outras duas respectivas forças. O modelo padrão também



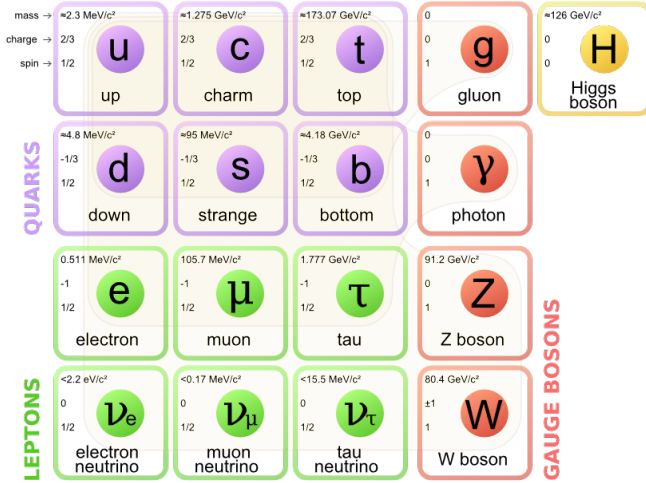


Figura 2.1: Partículas Elementares do Modelo Padrão. À esquerda as três gerações de férmions, divididos em quarks e glúons. As partículas interagem umas com as outras pela troca de bósons que caracterizam as interações fundamentais, são portanto chamados de mediadores das interações ou bósons *de calibre*, à direita da figura, junto com o bóson de Higgs, responsável pela origem da massa das partículas. As linhas agrupam férmions e bósons de acordo com as interações das quais participam, os glúons e os bósons  $W^\pm$  e  $Z^0$  também interagem consigo mesmos, o Higgs interage com todas as partículas massivas, incluindo ele próprio. Créditos da Imagem<sup>a</sup>

<sup>a</sup>”Standard Model of Elementary Particles” por MissMJ, publicado via Wikimedia Commons em [https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AStandard\\_Model\\_of\\_Elementary\\_Particles.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AStandard_Model_of_Elementary_Particles.svg) sob licença CC BY 3.0.

classifica as partículas elementares de acordo com suas propriedades e interações que participam, como ilustrado pela Fig. 2.1.

### 2.1.1 Cromodinâmica Quântica – QCD

A Cromodinâmica Quântica (QCD — *Quantum Chromodynamics*) corresponde ao grupo  $SU(3)$  do modelo padrão descreve as interações entre partículas que possuem carga de cor (ou anticor) — a qual pode assumir 3 valores, usualmente chamadas de  $r$ ,  $g$  e  $b$  ( $\bar{r}$ ,  $\bar{g}$  e  $\bar{b}$ ) — sendo elas os quarks (antiquarks) e glúons (estes possuem duas dessas cargas, sendo uma de cor e outra de anticor, e são suas próprias antipartículas). A QCD tem como uma de suas características o fato de que na

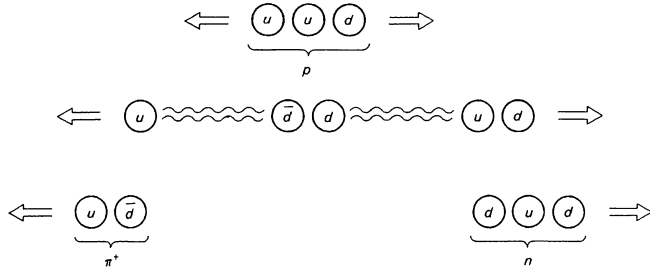


Figura 2.2: Confinamento de quarks. Inicialmente (acima) temos três quarks ( $uud$ ) ligados formando um próton. A intensidade da atração entre as cargas de cor é proporcional a distancia entre elas e ao tentar separar um dos quarks (meio), a energia investida ao sistema aumenta até eventualmente satisfazer a relação de equivalência entre massa e energia, ocasionando na criação de um par quark-antiquark ( $d\bar{d}$ ). A energia desse novo conjunto é então minimizada pela formação de estados ligados entre as novas partículas e as iniciais, resultando em dois hádrons no estado final, um pión e um nêutron (abaixo). Sendo assim os quarks nunca são observados livres, apenas compondo hádrons, fenômeno chamado de Confinamento. Figura retirada de [12].

natureza só são observadas partículas combinadas em estados singletos de cor, chamados de Hádrons, obtidos pela combinação das 3 cores (ou anticores), ou combinando uma cor com sua respectiva anticor.

Os hádrons são classificados de acordo com a maneira que são combinados os seus componentes internos em Bárions (3 quarks ou antiquarks) e Mésons (um quark e um antiquark). O estado singlete é efetivamente neutro quanto a carga de cor, e como os quarks só se apresentam nessas configurações os hádrons só interagem fortemente entre si em distâncias comparáveis ao seu tamanho, da ordem de  $\sim 1 fm$  ( $\sim 10^{-15}m$ ), justificando o curto alcance da QCD. É comum referir-se ao singlete como "incolor", "branco", "transparente", entre outros. Recentemente, alguns hádrons exóticos compostos por 4 quarks foram observados [10, 11].

Apesar do seu curto alcance a interação forte apresenta uma característica que lhe é peculiar: a intensidade da atração entre as cargas de cor aumenta fortemente com o aumento da distância entre elas, comportamento que não ocorre nas outras interações. Se dois quarks de um hádron por algum processo se afastarem, a força atrativa entre eles aumenta, sendo necessário fornecer cada vez mais energia para afastá-los ainda mais, eventualmente atingi-se a energia necessária para a criação

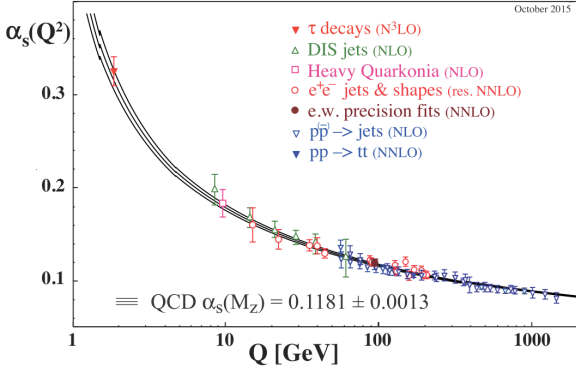


Figura 2.3: Variação de  $\alpha_s$  com a escala de energia  $Q$  medida utilizando diferentes processos e ordens,  $N^3LO$  equivalendo a next-to-NNLO. Figura retirada de [13]

de um par partícula-antipartícula, resultando assim em dois hádrons no estado final, como ilustrado pela Fig 2.2. Esse comportamento justifica o fato de não observamos quarks livres, razão pela qual dizemos que estão sempre *confinados* em estados ligados formando hádrons. Damos então a essa propriedade o nome de *Confinamento*. Esse fenômeno é obviamente inelástico e uma outra consequência desse comportamento é que nas interações envolvendo energias muito elevadas, típicas de aceleradores, o momento das partículas é suficiente para repetir esse processo diversas vezes até dissipar toda a anergia "freando" a partícula, formado assim jatos de hádrons que são observados experimentalmente, processo chamado de Hadronização.

Entretanto, o acoplamento da interação forte entre quarks e glúons é proporcional ao parâmetro  $\alpha_s(Q)$  que depende da escala de energia  $Q$  do processo, diminuindo conforme a energia  $Q$  aumenta e tendendo assintoticamente a zero no limite, como pode ser visto na Fig. 2.3. Para energias muito altas  $Q \gg 1\text{GeV}$  temos  $\alpha_s \ll 1$  e podemos considerar os quarks aproximadamente como se estivessem livres, fenômeno que é chamado de *Liberdade Assintótica*, que é uma característica necessária para a validade do modelo de pártons que será discutido na seção 2.2. Nesses regimes em que  $\alpha_s \rightarrow 1$  podemos utilizar Teoria de Perturbação, no entanto é difícil se obter resultados analíticos da interação forte a partir de primeiros princípios em espalhamentos hadrônicos. Uma possibilidade é estudar esses processos através da utilização de métodos numéricos, área de estudo chamada de *QCD na rede*, mas ainda

atualmente esses cálculos costumam ser muito demorados.

Ao propor o modelo de quarks [4, 5], não havia motivos aparentes para se pensar nos hádrons contendo outros componentes além dos  $3(2)$  quarks que descreviam as propriedades dos bárions e mésons detectados, mas com o desenvolvimento da QCD, revelou-se que o interior das partículas compostas por quarks (os hádrons) é melhor modelado como um sistema dinâmico composto de inúmeras partículas, antipartículas e glúons interagindo constantemente. Nessa configuração, exceto pelos  $3(2)$  quarks propostos inicialmente, a soma total das propriedades individuais de cada partícula é nula, sobrando apenas os números quânticos dos quarks que caracterizam seu respectivo estado hadrônico, razão de serem chamados de *quarks de valência*, às outras partículas nos referimos genericamente como *mar de quarks (sea)*.

Muitos processos não podem ser calculados diretamente por QCD perturbativa, pois devido ao Confinamento da cor os quarks e glúons não são observados livres, e os estados ligados que eles formam (hádrons) são de natureza não perturbativa, o que acabou levando ao desenvolvimento do *Teorema de Fatorização*, que separa os processos em uma parte perturbativa calculável interagente apenas nas distâncias equivalentes as dos quarks, e uma parte universal não perturbativa e de longo alcance, que geralmente pode ser medida. Um bom exemplo são as funções de distribuições de pártons (PDFs) que descrevem a composição do próton: são universais — no sentido de não dependerem do processo, sendo as mesmas nos espalhamentos elétron-próton e próton-próton, por exemplo — e podem ser obtidas experimentalmente.

Para entendermos a estrutura interna dos núcleons (ou qualquer hádron) e sua dinâmica é necessário então conhecermos essas distribuições, uma das características que elas apresentam é uma dependência com a escala de energia envolvida, sendo que em determinada energia pode ser mais provável encontrar um certo tipo partículas que outro, e em outra energia se observe o contrário. No Cap. 3 faremos a análise do processo Drell–Yan, nos limitando apenas a ordem dominante, que não envolve a participação de glúons nos diagramas de Feynmann, e portanto a QCD não entra no cálculo do elemento de matriz invariante, contribuindo apenas com um fator de cor dos quarks do estado inicial. No entanto ela influencia indiretamente no cálculo da seção de choque hadrônica através das informações a respeito da distribuição de glúons contidas pelas PDFs, e no Teorema da Fatorização.

### 2.1.2 Teoria Eletrofraca – EWT

A QED é a mais simples e compreendida das interações fundamentais e descreve o comportamento das partículas que possuem carga elétrica em interações mediadas pelo fóton, que por ser neutro tem como característica a conservação da carga elétrica das partículas interagentes. A força fraca por sua vez tem como mediadores das interações os bósons  $W^\pm$  e  $Z^0$  e é responsável pelo o decaimento das partículas, sendo a única interação capaz alterar o sabor das partículas envolvidas, assim como suas respectivas cargas elétricas e a paridade.

Em teorias de calibre com campos fermiônicos não massivos, a quiralidade é igual a helicidade e é uma quantidade conservada (a helicidade é definida como negativa — também chamada *de mão esquerda* — quando a projeção do spin sob a direção de propagação da partícula estiver no sentido oposto ao seu momento, e positiva — ou *de mão direita* — se estiverem no mesmo sentido). No entanto para férmions massivos a helicidade passa a depender do referencial, e os campos dos férmions podem ser decompostos em suas componentes com quiralidade negativa e positiva através dos projetores de quirais definidos como:

$$P_\pm \equiv \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5) \quad , \quad (2.1)$$

onde  $\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$  e  $\gamma_i$ , ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) são as matrizes de Dirac. Teorias que não diferenciam a quiralidade das partículas nas interações são ditas invariantes sob transformação de paridade  $\hat{P} : (t, x, y, z) \rightarrow (t, -x, -y, -z)$ . Férmions massivos não exibem simetria quiral e pode ocorrer quebra espontânea de simetria nas suas interações.

Estudando o decaimento  $\beta$  Fermi [14] observou que a paridade não era conservada, a natureza parecia ter uma "preferência" por partículas com quiralidade negativa, e essa assimetria motivou uma série de estudos culminando na formulação da Teoria Eletrofraca, unificando essas duas interações. Por suas contribuições nessa formulação em 1979 Weinberg, Glashow e Salam receberam o Prêmio Nobel e em 1984 Rubbia e van der Meer por tornarem possíveis os experimentos que ajudariam na descoberta dos bósons  $W^\pm$  e  $Z^0$  [7, 15].

As quantidades conservadas na força fraca são o terceiro componente do Isospin Fraco  $\tau_3$  (frequentemente chamado apenas de *Isospin Fraco*) e a Hipercarga Fraca  $Y_W$ , que relaciona  $\tau_3$  e a carga elétrica  $Q$  pela relação:

$$Y_W = 2(Q - \tau_3) \quad . \quad (2.2)$$

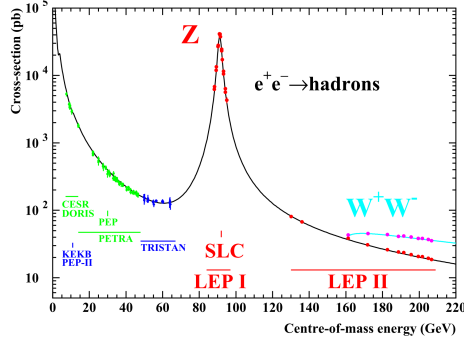


Figura 2.4: Detecção do bóson Z. O aumento da seção de choque na região dos 90 GeV é indicativo de uma ressonância com alguma partícula com essa massa. Figura retirada de [16]

O Isospin Fraco, assim como Isospin, agrupa os férmions em estados dupletos com  $\tau_3 = 1/2$  conforme a Tab. 2.1, onde também mostramos suas respectivas Hipercargas. É importante ressaltar que os valores tabelados são referentes às partículas com quiralidade negativa (ou equivalentemente às anti-partículas com quiralidade positiva), os férmions com quiralidade positiva (e os anti-férmions com quiralidade negativa) possuem  $\tau_3 = 0$  e não interagem fracamente.

Quarks: $u, c, t$	$\tau_3 = +1/2$	$Y_W = +1/3$
Quarks: $d, s, b$	$\tau_3 = -1/2$	$Y_W = +1/3$
Léptons: $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	$\tau_3 = +1/2$	$Y_W = -1$
Léptons: $e, \mu, \tau$	$\tau_3 = -1/2$	$Y_W = -1$

Tabela 2.1: Isospin fraco e Hipercarga fraca para férmions com quiralidade negativa (ou *canhotos*). Para anti-partículas com quiralidade positiva (*destros*) os valores são os mesmos. Férmions com quiralidade positiva possuem  $\tau_3 = 0$  e não interagem fracamente.

A Teoria Eletrofraca é baseada numa quebra de simetria  $SU(2) \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$ , onde  $U(1)_{EM}$  é o grupo associado ao eletromagnetismo, e  $U(1)_Y$  à Hipercarga  $Y_W$ , são introduzidos os parâmetros de acoplamento  $g$  e  $g'$  e os bósons de calibre  $W_\mu^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) e  $B_\mu$ , associados aos grupos  $SU(2)$  e  $U(1)_Y$ , respectivamente. A unificação é válida para energias elevadas e a quebra de simetria é relacionada ao valor esperado do vácuo obtido do mecanismo de Higgs, e ocorre ao

abaixar a energia atingindo a ordem dos 100 GeV.

A Lagrangiana da Teoria Eletrofraca pode ser escrita dividida em quatro partes:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_h + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_y \quad , \quad (2.3)$$

onde o primeiro termo descreve as interações entre os bósons de calibre  $W_\mu^a$  e  $B_\mu$ , o segundo o campo de Higgs, o terceiro termo descreve a dinâmica das interações entre férmions e os bósons de calibre, e o quarto é a interação de Yukawa, que descreve o acoplamento dos férmions com o campo escalar (do Higgs), e dá origem à massa dos férmions, proporcional ao valor esperado do vácuo (vev) obtido do Mecanismo de Higgs.

A Lagrangiana das interações entre os bósons tem a forma

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} (W_{\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{4} B_{\mu\nu}^2 \quad , \quad (2.4)$$

com  $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$  e  $W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g\epsilon_{ijk}W_\mu^jW_\nu^k$ .

A Lagrangiana correspondente ao Higgs é

$$\mathcal{L}_h = (D_\mu H)^\dagger (D_\mu H) + m^2 H^\dagger H - \lambda (H^\dagger H)^2 \quad , \quad (2.5)$$

onde  $H$  é um duplete de Higgs, escalar e complexo, com hipercarga fraca  $Y = 1/2$ . O potencial de Higgs  $V(H) = -m^2|H|^2 + \lambda|H|^4$  induz um valor esperado do vácuo ao campo  $H$ , que podemos tomar como real e na componente inferior do duplete sem perda de generalidade. Com a derivada covariante dada por

$$D_\mu H = \partial_\mu H - igW_\mu^a \tau^a H - \frac{1}{2}ig'B_\mu H \quad , \quad (2.6)$$

onde  $\tau^a = \frac{1}{2}\sigma^a$  ( $\sigma^a$  são as matrizes de Pauli: Ap. A.1), são os geradores canônicos normalizados do grupo SU(2), podemos obter:

$$\begin{aligned} |D_\mu H|^2 &= g^2 \frac{m^2}{8\lambda} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{g'}{g}B_\mu + W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & \frac{g'}{g}B_\mu - W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= g^2 \frac{m^2}{8\lambda} \left[ (W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2 + \left( \frac{g'}{g}B_\mu - W_\mu^3 \right)^2 \right] \quad , \end{aligned} \quad (2.7)$$

termos associados a 3 bósons massivos. Diagonalizando as massas do campo  $\frac{g'}{g}B_\mu - W_\mu^3$  definimos novos campos  $Z_\mu$  e  $A_\mu$ , correspondentes

aos bósons  $Z^0$  e do fóton, respectivamente, pela matriz de rotação

$$\begin{aligned} Z_\mu &= \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu \\ A_\mu &= \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu \quad , \end{aligned} \quad (2.8)$$

ou inversamente

$$\begin{aligned} B_\mu &= \cos \theta_W A_\mu - \sin \theta_W Z_\mu \\ W_\mu^3 &= \sin \theta_W A_\mu + \cos \theta_W Z_\mu \quad , \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde foi introduzido o parâmetro  $\theta_W$  chamado de *Ângulo de Weinberg* que se relaciona com os acoplamentos conforme

$$\begin{aligned} \tan \theta_W &= \frac{g'}{g} \\ \cos \theta_W &= \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \frac{M_W}{M_Z} \\ \sin \theta_W &= \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad , \end{aligned} \quad (2.10)$$

e com a carga elétrica por

$$e = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W \quad , \quad (2.11)$$

e para os bósons  $W^\pm$  podemos encontrar a relação

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \quad , \quad (2.12)$$

e suas inversas

$$\begin{aligned} W_\mu^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ + W_\mu^-) \\ W_\mu^2 &= \frac{i}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ - W_\mu^-) \quad . \end{aligned} \quad (2.13)$$

É comum expressar os acoplamentos da interação em termos da constante de Fermi  $G_F$  através da relação

$$\begin{aligned} \frac{G_F}{(\hbar c)^3} &= \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{g^2}{M_W^2} \\ &= 1,6637(1) \times 10^{-5} GeV^{-2} \quad . \end{aligned} \quad (2.14)$$



A Lagrangiana das interações com os férmions é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_f = & i\bar{L}_L^i (\not{\partial} - igW^a\tau^a - ig'Y_L\mathbb{B}) L_L^i \\
& + i\bar{Q}_L^i (\not{\partial} - igW^a\tau^a - ig'Y_Q\mathbb{B}) Q_L^i \\
& + i\bar{e}_R^i (\not{\partial} - ig'Y_e\mathbb{B}) e_R^i + i\bar{\nu}_R^i (\not{\partial} - ig'Y_\nu\mathbb{B}) \nu_R^i \\
& + i\bar{u}_R^i (\not{\partial} - ig'Y_u\mathbb{B}) u_R^i + i\bar{d}_R^i (\not{\partial} - ig'Y_d\mathbb{B}) d_R^i \quad ,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

onde as gerações dos férmions de mão esquerda estão agrupados nos dupletos

$$L_L^i = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix} \quad Q_L^i = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix} \quad ,$$

e os de mão direita nos singletos<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
e_R^i &= \{e_R, \mu_R, \tau_R\} & \nu_R^i &= \{\nu_{eR}, \nu_{\mu R}, \nu_{\tau R}\} \\
u_R^i &= \{u_R, c_R, t_R\} & d_R^i &= \{d_R, s_R, b_R\} \quad .
\end{aligned}$$

Podemos utilizar os projetores quirais definidos na Eq. 2.1 para separar a lagrangiana em suas componentes quirais, o que vai facilitar observarmos a quebra na simetria de paridade da teoria

$$\Psi = \Psi_L + \Psi_R = P_- \Psi + P_+ \Psi \quad . \tag{2.16}$$

Para obtermos as regras de Feynman das interações entre os férmions e os bósons de calibre após a quebra de simetria — ou seja, os bósons  $W^\pm$  e  $Z^0$  correspondentes a Teoria Fraca, e o  $A$  correspondente ao fóton da QED — substituímos as transformações obtidas nas Eqs. 2.9 e 2.13 na Lagrangiana da Eq. 2.15, obtendo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_f = & -i \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_i \bar{\Psi}^i \gamma^\mu \frac{(1 - \gamma^5)}{2} (\tau^+ W_\mu^+ + \tau^- W_\mu^-) \Psi^i \\
& - ie \sum_i Q_i \bar{\Psi}^i \gamma^\mu \Psi^i A_\mu \\
& - i \frac{g}{2 \cos \theta_W} \sum_i \bar{\Psi}^i \gamma^\mu \left( g_L^i \frac{(1 - \gamma^5)}{2} + g_R^i \frac{(1 + \gamma^5)}{2} \right) \Psi^i Z_\mu \quad ,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

---

<sup>1</sup>Cabe lembrar que neutrinos com helicidade positiva e antineutrinos com helicidade negativa nunca foram observados e possivelmente não existem, suas possíveis interações são apresentadas na Lagrangiana apenas por completudeza.

onde o primeiro termo corresponde as interações de corrente carregada da força fraca, mediadas pelos bósons  $W^\pm$ , com  $\tau^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tau^1 \pm i\tau^2)$  sendo os operadores de levantamento e abaixamento do Isospin fraco. O segundo termo descreve as interações da QED,  $Q_i$  é a carga elétrica da partícula. E o último termo corresponde as interações de corrente neutra da força fraca, mediadas pelo bóson  $Z^0$ , os parâmetros de acoplamento com as projeções quirais são

$$g_X^i = 2\tau_{3,X}(i) - 2Q_i \sin^2 \theta_W \quad , \quad X = \{L, R\} \quad . \quad (2.18)$$

Podemos identificar os projetores quirais na Lagrangiana: o primeiro termo seleciona apenas as projeções negativas, o segundo termo (fóton) é simétrico, já o terceiro interage tanto com as projeções negativas quanto as positivas, porém com intensidades diferentes devido aos parâmetros de acoplamento. Substituindo os valores de  $\tau_3$  e  $Q_i$  conforme a Tab. 2.1 obtemos os acoplamentos dos férmions na corrente neutra:

$$\begin{aligned} g_L^e &= 2 \sin^2 \theta_W - 1 & g_R^e &= 2 \sin^2 \theta_W \\ g_L^\nu &= 1 & g_R^\nu &= 0 \\ g_L^u &= 1 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W & g_R^u &= -\frac{4}{3} \sin^2 \theta_W \\ g_L^d &= \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W - 1 & g_R^d &= \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \quad . \end{aligned} \quad (2.19)$$

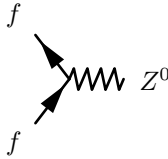
Com a Lagrangiana nesta forma fica muito simples escrever as regras de Feynman para os diagramas dos vértices com os férmions. Como estamos interessados no processo Drell–Yan, de corrente neutra, obtemos a regra para o vértice com do bóson  $Z^0$

$$-i \frac{g}{2 \cos \theta_W} \gamma^\mu \left( g_L^f \frac{(1 - \gamma^5)}{2} + g_R^f \frac{(1 + \gamma^5)}{2} \right) \quad , \quad (2.20)$$

utilizando as relações

$$G_F = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{g^2}{M_W^2} \quad M_Z = \frac{M_W}{\cos \theta_W} \quad , \quad (2.21)$$

reescrevemos:



$$\frac{-i}{\sqrt{2}} \left( \frac{G_F M_Z^2}{\sqrt{2}} \right)^{1/2} \gamma_\mu \left[ g_L^f (1 - \gamma_5) + g_R^f (1 + \gamma_5) \right]$$

$$g_X^f = 2\tau_{3,X}(f) - 2Q_f \sin^2 \theta_W \quad , \quad X = \{L, R\}$$

Figura 2.5: Vértice da interação fraca entre o bóson  $Z^0$  e férmions.

Que também pode ser expresso em termos dos operadores de projeção quiral pela relação  $1 \pm \gamma_5 = 2P_\pm$ .

## 2.2 O Modelo de Pártons

Estudando o espalhamento de partículas  $\alpha$  com energia cinética de aproximadamente 8 MeV, Rutherford em 1911 [17] foi capaz de estimar a partir de um modelo clássico um raio máximo para o núcleo de átomos de ouro da ordem de  $10^{-14}$  m. Um resultado melhor poderia ser obtido utilizando-se o menor núcleo possível (um próton), a menor sonda (um elétron<sup>2</sup>), e a maior energia possível, o que só seria possível 50 anos após os experimentos de Rutherford. Em energias baixas, o espalhamento  $e^-p^+$  (elétron-próton) é elástico — também chamado de espalhamento de Coulomb por ser esta a força dominante — e o próton se comporta como se não tivesse subestrutura, de forma semelhante a um espalhamento  $e^- \mu^+$ .

Num modelo clássico a seção de choque do espalhamento deve valer para distâncias arbitrariamente pequenas, no entanto com o desenvolvimento da QED pequenas correções quânticas aparecem, como ocorre por exemplo no caso do espalhamento  $e^+ \mu^-$ , correções essas que são estudadas por meio de um modelo em que a interação entre as partículas ocorre pela troca de um fóton virtual, possuindo quadrimomento  $q^\mu$ . As interações mais gerais entre um fóton virtual e qualquer partícula de spin- $\frac{1}{2}$  podem ser parametrizadas por fatores de forma  $F_1$  e  $F_2$  em termos de  $q^2$ . Esse formalismo, contudo, não assume em seu desenvolvimento nada que seja específico às interações da QED, sendo portanto igualmente válido para descrever fenômenos da QCD (ou outra teoria), justificando sua utilização no estudo do espalhamento  $e^- p^+$ , como faremos a seguir para o caso inelástico.

O fator de forma é uma função que tem como propósito incorporar de forma fenomenológica todas as propriedades características de uma

---

<sup>2</sup>Neutrinos ainda não eram conhecidos.

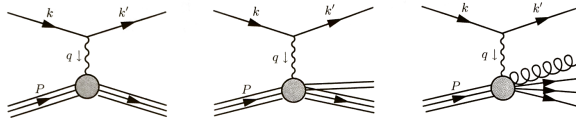


Figura 2.6: Com o aumento da energia (para a direita), os diferentes processos observados: passando do espalhamento elástico (à esquerda), para levemente inelástico com a produção de um méson (no centro), e profundamente inelástico com a produção de jatos hadrônicos, podendo levar à destruição do próton (à direita). Figura retirada de [19]

determinada interação sem incluir toda a física entre as partículas em sua forma mais fundamental, sendo determinado experimentalmente. Assim, é uma boa forma de investigar fenômenos cuja natureza ainda não é bem compreendida, ou em casos como os mencionados na seção 2.1.1, em que nem sempre é possível obter resultados analíticos a partir de primeiros princípios, como ocorre no caso do fóton interagindo com os constituintes de um próton — nesse contexto é comum se referir aos fatores de forma como *funções de estrutura*, em razão de estarem relacionados através de sua transformada de Fourier com a distribuição espacial de cargas e correntes, ou mais especificamente se tratando da QCD, com a distribuição de quarks e glúons dentro do núcleon, estando portanto intimamente relacionados à sua estrutura.

Os fatores de forma correspondentes a interações da QED são facilmente calculados e podem ser então comparados com dados experimentais. Em espalhamentos leptônicos os dados são compatíveis com a teoria, no entanto no caso dos prótons isso não ocorre, sugerindo que eles devem participar de outras interações além da QED. Um resultado interessante obtido em 1966 a partir das medidas dos fatores de forma [18], concluiu que o próton teria um tamanho característico da ordem de 1 fm, valor que não é surpreendente por ser da mesma ordem do seu comprimento de onda Compton, a novidade é a própria existência de uma escala associada, nos espalhamentos leptônicos isso não ocorria, indicando a possibilidade de haver uma estrutura interna no próton.

Foi mencionado no início dessa seção que ao realizar experimentos em energias maiores podemos resolver com mais detalhes as distribuições internas dessa estrutura e, de fato, em energias altas o suficiente são revelados os quarks como constituintes fundamentais do próton, esses sim partículas pontuais. Nessas escalas de energia outro fenômeno observado, ilustrado na Fig. 2.6, é a "quebra" do próton em outras

partículas e em casos extremos nos jatos característicos do processo de hadronização visto na seção 2.1.1, caracterizando um processo inelástico conhecido como "espalhamento profundamente inelástico" ou apenas DIS, da sigla em inglês, a partir do qual se formulou o modelo de pártons.

### 2.2.1 Espalhamento Profundamente Inelástico – DIS

O espalhamento profundamente inelástico é o processo no qual um elétron (ou neutrino) interage com um hádron transferindo parte de seu momento através da troca de um fóton (ou  $W^\pm$ ). Vamos nos restringir ao espalhamento do elétron, correspondente ao diagrama ilustrado pela Fig. 2.7. Inicialmente o elétron possui momento ( $p_1$ ) e após a interação seu momento é ( $p_2$ ), e o hádron ( $H$ ) possui momento inicial ( $P$ ), e após a interação temos um estado arbitrário ( $X$ ).

$$e(p_1) + H(P) \rightarrow e(p_2) + X \quad (2.22)$$

A parametrização da seção de choque desenvolvida para o vértice fóton-próton em termos dos fatores de forma  $F_1$  e  $F_2$  em função apenas do quadrimomento do fóton virtual  $q$  deixa de ser válida no espalhamento inelástico, pois uma vez que no estado final temos novas partículas, não é mais possível determinar completamente a interação conhecendo unicamente o momento transferido pelo fóton virtual — no caso apenas o estado final do elétron é conhecido. É necessário obter uma nova parametrização para as interações fóton-próton- $X$ , onde  $X$  é qualquer partícula (ou partículas) extra(s) no estado final. Uma boa escolha é utilizar o quadrimomento do fóton virtual  $q = p_1 - p_2$  e o quadrimomento do próton  $P$ .

Bjorken [21] havia demonstrado que a seção de choque no espalhamento profundamente inelástico elétron-núcleon a altas energias satisfazia uma propriedade — hoje chamada de *Bjorken Scaling* — segundo a qual as funções de estrutura do núcleon, que dependem de duas variáveis: o quadrimomento do fóton virtual trocado e a diferença na energia do elétron espalhado; em altas energias passam a depender apenas da razão entre essas duas variáveis. Bjorken e Paschos [22] e Feynman [23] atribuíram essa propriedade a natureza pontual dos constituintes do núcleon, e Feynman nomeou-os genericamente de pártons. Na época a QCD não havia sido desenvolvida e não se sabia se haviam outros constituintes nos núcleons além dos 3 quarks de valência, mas Feynman deixou aberta a possibilidade de que os pártons pudessem não ser necessariamente eles.

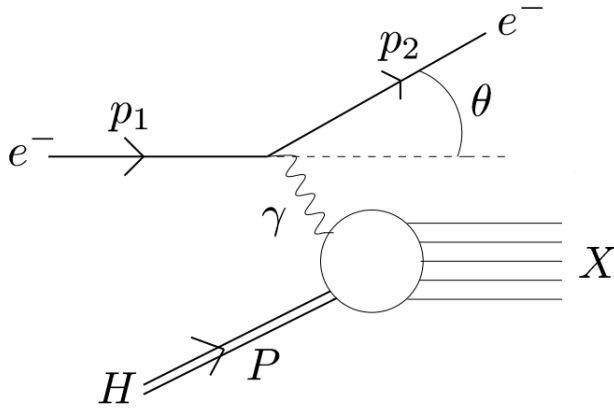


Figura 2.7: Espalhamento profundamente Inelástico. Figura retirada de [20]

O modelo de pártons trata o próton como se dentro dele houvesse estruturas pontuais essencialmente livres chamadas de *pártons*, podendo ser carregados ou não, e estudando espalhamentos em altas energias podemos comparar experimento e teoria para determinar como é essa estrutura. As funções de estrutura do próton descrevem a densidade (ou probabilidade) de partículas dentro do próton em função da energia e são chamadas de PDFs, de *Parton Distribution Functions*.

Posteriormente [24–26] mostrou-se que se fosse satisfeita a aproximação de impulso<sup>3</sup> como ocorre no comportamento assintótico dos quarks em altas energias devido a diminuição do parâmetro de acoplamento da QCD  $\alpha_S$ , discutido na seção 2.1.1, que pode ser garantido pela imposição de um limite no momento transversal, era possível derivar o modelo de pártons a partir de uma teoria quântica de campos; assim como para outros processos além do espalhamento elétron-núcleon, como por exemplo a produção de um par lépton-antilépton por colisões entre prótons. O processo no qual um párton de um próton é aniquilado por um antipárton de outro próton produzindo um par leptônico é chamado de processo Drell–Yan. A aproximação de impulso foi depois substituída pelo Teorema de Fatorização.

<sup>3</sup>Que durante o espalhamento os constituintes se comportam como se estivessem livres.

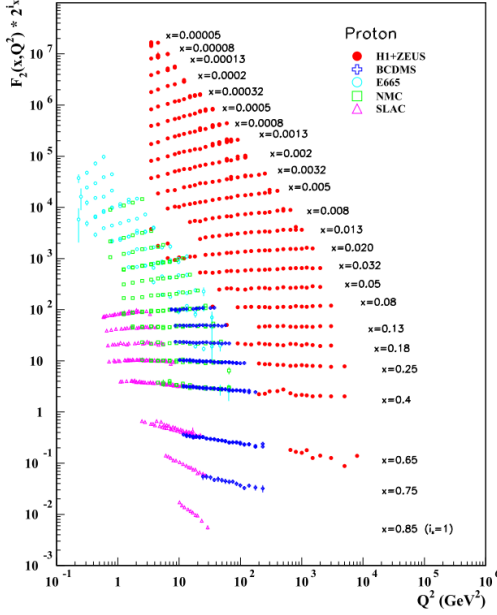


Figura 2.8: Confirmação experimental do escalamento de Bjorken em espalhamento profundamente inelástico.. Figura retirada de [13]

### 2.2.2 O Processo Drell–Yan

No modelo de pártons tratamos os hádron como distribuições de pártons, e dizemos que para um dado hádron  $A$  (que vamos tomar como um próton) com momento total  $P_A$ , cada um de seus constituintes carrega uma fração  $x_A$ ,  $0 < x_A < 1$  do seu momento total. Os parâmetros que se referem aos pártons são escritos com um símbolo  $\hat{\phantom{x}}$  em cima para diferenciá-los dos parâmetros do hádron. Em altas energias a liberdade assintótica garante que podemos tratar os pártons como se estivessem livres, ou seja, sem interagirem uns com os outros. E a fatorização garante que nas escalas da interação os processos com altas transferências de momento podem ser tratadas perturbativamente, enquanto que o processo de hadronização ocorre em escalas de distância muito grande e tempo muito longo e não interfere nos processos nas escalas dos pártons.

Em colisões hadrônicas colineares a altas energias, onde a massa das partículas envolvidas podem ser desprezadas, a seção de choque hadrônica para o processo Drell–Yan entre um hádron  $A$  e um  $B$  é dada

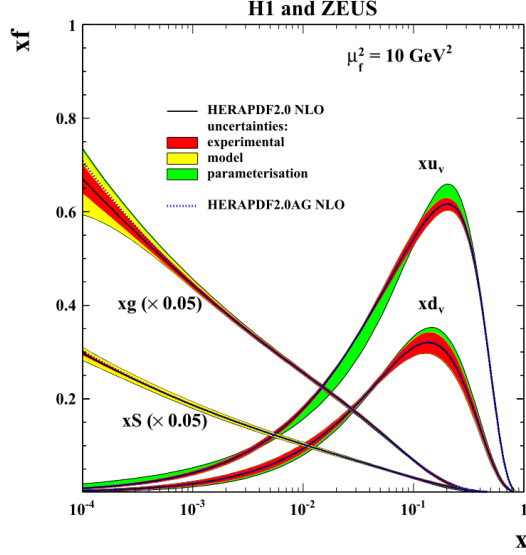


Figura 2.9: Exemplo de PDF. Figura retirada de [27]

por:

$$d\sigma = f_a(x_A) f_{\bar{a}}(x_B) \hat{\sigma} dx_A dx_B \quad (2.23)$$

Onde as funções  $f_a(x_A)$  e  $f_{\bar{a}}(x_A)$  são as PDFs.  $f_a(x_A)$  dá a probabilidade de encontrar um parton da família  $a$  com fração de momento  $x_A$  no hádron A, enquanto que  $f_{\bar{a}}(x_B)$  a probabilidade de encontrar um anti-parton da família  $a$  com fração de momento  $x_B$  no hádron B.  $\sigma$  é a seção de choque hadrônica e  $\hat{\sigma}$  é a seção de choque partônica. Exemplos de PDFs são exibidos na Fig. 2.9. A seção de choque total é obtida integrando sobre todas as frações de momento possíveis dos partons  $x_A$  e  $x_B$ , respeitando-se o limite de validade do modelo.





### 3 Produção de Bóson Z

Dos processos que envolvem a produção de bóson Z um dos mais estudados é o Processo Drell–Yan, o qual consiste na produção de um par leptônico resultante de uma aniquilação quark–antiquark em colisões hadrônicas, em que cada hádron contribui com uma das partículas iniciais:  $p\bar{p} \rightarrow l^+l^-X$  ( $l = e, \mu$ ), podendo também ocorrer por meio de um fóton virtual, conforme mostrado no diagrama da 3.1. O par de léptons finais também é chamado de dilépton.

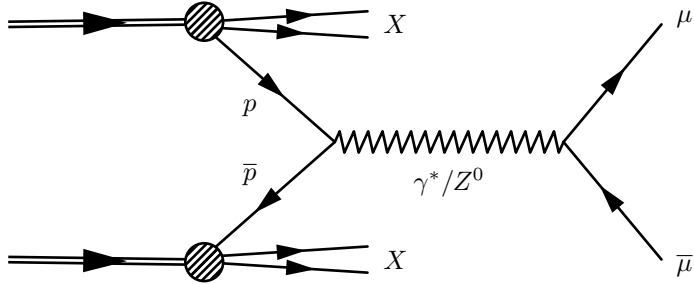


Figura 3.1: Processo Drell–Yan em ordem dominante: um parton de um próton (círculo hachurado) se aniquila com o antipartão de outro próton formando um bóson, que pode ser um fóton virtual  $\gamma^*$  ou um bóson  $Z^0$ . O bóson por sua vez gera o par lépton–antilépton. Os constituintes do próton além dos partons que se aniquilam não são considerados e estão representados pelo  $X$ .

Esse processo foi inicialmente estudado utilizando o modelo de Pártons por Sidney D. Drell e Tung-Mow Yan em seu artigo de 1970 *Massive Lepton-Pair Production in Hadron-Hadron Collisions at High Energies* [28, 29]. O resultado explícito da seção de choque total pode ser encontrado em um artigo de 1977 [30], antes da descoberta do bóson Z. Neste artigo, apenas a ordem dominante é considerada e o resultado obtido para a seção de choque é adequado para fins de comparação com este trabalho. Sua massa foi estimada em aproximadamente 76 GeV, a partir dos parâmetros da teoria, cujos valores também não haviam

sido determinados até então. No artigo original, o ângulo de Weinberg por exemplo é estimado como  $\sin^2 \theta_W = \frac{3}{8} = 0,375$  enquanto que nas medidas atuais temos  $\sin^2 \theta_W = 0,23129(5)$  [31].

O grande interesse no estudo desse processo se deve em razão de algumas características bastante interessantes [32]: na produção de léptons de pequena massa e para baixos valores de  $x$  (fração de momento dos pártons iniciais) possui uma grande sensibilidade as PDFs; na região de ressonância do bóson  $Z$ , contribui determinação da massa dos bósons  $W$  e do ângulo de Weinberg  $\theta_W$ ; enquanto que para energias acima da ressonância pode ser usado na busca de física além do modelo padrão.

Como vimos, o Modelo de Pártons e o Teorema da Fatorização nos possibilita calcular a seção de choque hadrônica para o processo Drell–Yan a partir das PDFs e da seção de choque dos pártons que participam da interação utilizando a Eq. 2.23. Precisamos então das regras de Feynman relevantes, já obtivemos da Lagrangiana na Eq. 2.17 o vértice correspondente ao bóson  $Z$  e férmions, apresentado na Fig. 2.5, resta agora aplicar a regra para o vértice dos quarks e dos léptons e obter os outros elementos necessários para a construção do elemento de matriz invariante.

### 3.1 Regras de Feynman

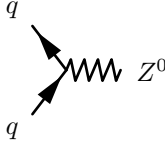
Os férmions entrando e saindo do diagrama são representados por uma seta em direção ao vértice no caso de partículas e direção contrária ao vértice para antipartículas. As regras de Feynman correspondentes encontram-se na Tabela 3.1.

Férmion no estado inicial	$u$
Férmion no estado final	$\bar{u}$
Anti-férmion no estado inicial	$\bar{v}$
Anti-férmion no estado final	$v$

Tabela 3.1: Regras para férmions entrando e saindo do diagrama.  $u$  e  $v$  são os espinores das partículas e  $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$ .

Os espinores  $u$  e  $v$  contém informações da massa, energia, momento, spin, helicidade das partículas, são obtidos da equação de Dirac assim





$$\frac{-i}{\sqrt{2}} \left( \frac{G_F M_Z^2}{\sqrt{2}} \right)^{1/2} \gamma_\mu [g_L^q (1 - \gamma_5) + g_R^q (1 + \gamma_5)]$$

$$(g_L^q = 2\tau_3(q) - 2Q_q \sin^2 \theta_W, g_R^q = -2Q_q \sin^2 \theta_W)$$

Figura 3.4: Vértice da interação fraca para o bóson  $Z^0$  e quarks.  $\tau_3(q)$  é o Isospin Fraco dos quarks e  $Q_q$  a sua carga elétrica.

## 3.2 O Processo Drell–Yan em ordem dominante

A seção de choque diferencial no centro de momento em escalas de energias que podemos considerar o limite em que a massa é muito pequena ( $m \rightarrow 0$ ) é dada por [33]:

$$\left( \frac{d\hat{\sigma}}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{cm}^2} \quad (3.3)$$

onde precisamos levar em conta no termo  $|\mathcal{M}|^2$  as seguintes contribuições:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= |\mathcal{M}_Z + \mathcal{M}_\gamma|^2 \\ &= |\mathcal{M}_Z|^2 + |\mathcal{M}_\gamma|^2 + 2|\mathcal{M}_Z \mathcal{M}_\gamma^*|^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

correspondentes ao diagrama do bóson Z, do fóton virtual, e dos termos de interferência entre esses dois, respectivamente. Vamos na sequência ver em detalhes o cálculo do primeiro termo, que nas escalas de massa do dilépton da ordem da massa do bóson Z, será o termo com maior contribuição na seção de choque devido a ressonância com essa partícula, como pode ser visto na Fig. 2.4.

### 3.2.1 Cálculo do Elemento de Matriz Invariante

O cálculo do elemento de matriz invariante  $\mathcal{M}$  é feito aplicando as regras de Feynman seguindo a convenção estabelecida acima. Para o diagrama da Fig. 3.1. Começando pelo lado direito, seguindo a linha dos léptons temos o espinor da partícula  $\mu$  (com quadrimomento  $p_c$ ):  $\bar{u}_c$ , passando pelo vértice da força fraca para os léptons:

$$\frac{-i}{\sqrt{2}} \left( \frac{G_F M_Z^2}{\sqrt{2}} \right)^{1/2} \gamma_\mu [g_L^e (1 - \gamma_5) + g_R^e (1 + \gamma_5)] \quad (3.5)$$

Depois temos o espinor da antipartícula  $\bar{\mu}$  (com quadrimomento  $p_d$ ):  $v_d$ , o propagador do bóson vetorial com quadrimomento  $q$ :

$$\frac{-i (g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / M_Z^2)}{q^2 - M_Z^2} \quad (3.6)$$

Ainda o espinor da antipartícula  $\bar{q}$  (com quadrimomento  $p_b$ ):  $\bar{v}_b$ , passando pelo vértice da força fraca para os quarks:

$$\frac{-i}{\sqrt{2}} \left( \frac{G_F M_Z^2}{\sqrt{2}} \right)^{1/2} \gamma_\mu [g_L^q (1 - \gamma_5) + g_R^q (1 + \gamma_5)] \quad (3.7)$$

Finalmente o espinor da partícula  $q$  (com quadrimomento  $p_a$ ):  $u_a$ . Juntando todos os termos ficamos com a equação:

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M} = & \frac{i}{2} \left( \frac{G_F M_Z^2}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{4}{q^2 - M_Z^2} \right) \bar{u}_c \gamma_\mu [g_L^e P_- + g_R^e P_+] v_d \\ & \times (g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / M_Z^2) \bar{v}_b \gamma_\nu [g_L^q P_- + g_R^q P_+] u_a \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde  $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$  e  $P_\pm$  são os projetores de quiralidade definidos na Eq. 2.1.

O módulo do elemento de matriz invariante ao quadrado fica:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 = & \frac{1}{4} \left( \frac{G_F M_Z^2}{\sqrt{2}} \right)^2 \left( \frac{4}{q^2 - M_Z^2} \right)^2 \\ & \times \bar{u}_a [g_L^q P_+ + g_R^q P_-] \gamma_\sigma v_b (g^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma / M_Z^2) \bar{v}_d [g_L^e P_+ + g_R^e P_-] \gamma_\rho u_c \\ & \times \bar{u}_c \gamma_\mu [g_L^e P_- + g_R^e P_+] v_d (g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / M_Z^2) \bar{v}_b \gamma_\nu [g_L^q P_- + g_R^q P_+] u_a \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde utilizamos o fato de que para um número complexo vale a relação  $(-i\mathcal{M})^* \equiv (-i\mathcal{M})^\dagger$ , que  $\gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\mu$ ,  $P_\pm^\dagger = P_\pm$ , e a relação de anti-comutação  $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$  de onde temos  $P_\pm \gamma^0 = \gamma^0 P_\mp$ .

Os espinores dependem dos spins das partículas e todas as possibilidades devem ser consideradas para obtermos a seção de choque total. Como não sabemos quais são os spins das partículas no início da interação (vamos dizer que são  $s, s'$ ), calculamos então a média sobre todas as possibilidades:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4} \sum_{s, s'} |\mathcal{M}|^2 \quad (3.10)$$

Para os léptons no estado final, com spins  $r, r'$ , temos que levar em conta (somar) as contribuições de todas possibilidades de spins, independentemente dos spins iniciais, assim ficamos com:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{s,s'} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{4} \left( \frac{G_F M_Z^2}{\sqrt{2}} \right)^2 \left( \frac{4}{q^2 - M_Z^2} \right)^2 \times \frac{1}{4} \sum_{s,s',r,r'} \\ &\{ \bar{u}_a [g_L^q P_+ + g_R^q P_-] \gamma_\sigma v_b (g^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma / M_Z^2) \bar{v}_d [g_L^e P_+ + g_R^e P_-] \gamma_\rho u_c \\ &\times \bar{u}_c \gamma_\mu [g_L^e P_- + g_R^e P_+] v_d (g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / M_Z^2) \bar{v}_b \gamma_\nu [g_L^q P_- + g_R^q P_+] u_a \} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Rigorosamente deveríamos escrever  $u_a = u_a^{(s)}$ ,  $v_b = v_b^{(s')}$ ,  $u_c = u_c^{(r)}$ , e  $v_d = v_d^{(r')}$ , mas para não carregar a notação omitimos os rótulos dos spins.

Podemos abrir as multiplicações do termos entre colchetes e ficamos com:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{s,s'} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{4} \left( \frac{G_F M_Z^2}{\sqrt{2}} \right)^2 \left( \frac{4}{q^2 - M_Z^2} \right)^2 \\ &\times \frac{1}{4} \sum_{s,s',r,r'} [ \bar{u}_a g_L^q P_+ \gamma_\sigma v_b (g^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma / M_Z^2) \bar{v}_d g_L^e P_+ \gamma_\rho u_c \\ &\quad \times \bar{u}_c \gamma_\mu g_L^e P_- v_d (g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / M_Z^2) \bar{v}_b \gamma_\nu g_L^q P_- u_a \\ &\quad + \dots ] \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde apresento apenas o primeiro dos 16 termos pois a conta é desenvolvida similarmente para todos. Sabendo que o termo à esquerda da igualdade é um número que real e, portanto, vale  $|\mathcal{M}|^2 = \text{Tr} \{ |\mathcal{M}|^2 \}$  podemos tirar o traço dos dois lados da equação. Como os termos  $g_L^e$ ,  $g_R^e$ ,  $g_L^q$  e  $g_R^q$  são valores reais, assim como os termos agrupados de forma  $\bar{u} P_\pm \gamma_\mu v$  podemos reorganizá-los dentro da equação para obter

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{s,s'} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{4} \left( \frac{G_F M_Z^2}{\sqrt{2}} \right)^2 \left( \frac{4}{q^2 - M_Z^2} \right)^2 \\ &\times \frac{1}{4} \sum_{s,s',r,r'} [ g_L^q g_L^e \text{Tr} \{ \bar{u}_a P_+ \gamma_\sigma v_b \bar{v}_b \gamma_\nu g_L^q P_- u_a \\ &\quad \times (g^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma / M_Z^2) (g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / M_Z^2) \\ &\quad \times \bar{v}_d P_+ \gamma_\rho u_c \bar{u}_c \gamma_\mu g_L^e P_- v_d \} \\ &\quad + \dots ] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Utilizando as propriedades do operador traço —  $\text{Tr}\{A+B\} = \text{Tr}\{A\} + \text{Tr}\{B\}$  e  $\text{Tr}\{AB\} = \text{Tr}\{BA\}$  — podemos ainda reescrever a equação na forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{s,s'} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{4} \left( \frac{G_F M_Z^2}{\sqrt{2}} \right)^2 \left( \frac{4}{q^2 - M_Z^2} \right)^2 \\ &\times \frac{1}{4} \sum_{s,s',r,r'} \left[ g_L^{q^2} g_L^{e^2} \text{Tr} \{ u_a \bar{u}_a P_+ \gamma_\sigma v_b \bar{v}_b \gamma_\nu P_- \} \right. \\ &\quad \times (g^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma / M_Z^2) (g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / M_Z^2) \\ &\quad \left. \times \text{Tr} \{ v_d \bar{v}_d P_+ \gamma_\rho u_c \bar{u}_c \gamma_\mu P_- \} + \dots \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

e assim podemos utilizar as relações  $\sum_{spins} u\bar{u} = \not{p} + m$  e  $\sum_{spins} v\bar{v} = \not{p} - m$  eliminando as somatórias dos spins do lado direito:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{s,s'} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{4} \left( \frac{G_F M_Z^2}{\sqrt{2}} \right)^2 \left( \frac{4}{q^2 - M_Z^2} \right)^2 \\ &\times \frac{1}{4} \left[ g_L^{q^2} g_L^{e^2} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_a + m_q) P_+ \gamma_\sigma (\not{p}_b - m_q) \gamma_\nu P_- \right\} \right. \\ &\quad \times (g^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma / M_Z^2) (g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / M_Z^2) \\ &\quad \left. \times \text{Tr} \left\{ (\not{p}_d - m_\mu) P_+ \gamma_\rho (\not{p}_c + m_\mu) \gamma_\mu P_- \right\} + \dots \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

como  $\not{p} = p_\mu \gamma^\mu$ , podemos aplicar as identidades do operador traço com as matrizes de Dirac apresentadas em Ap. A.3 termo a termo. Para o regime de altas energias ( $q \rightarrow \infty$ ) podemos desprezar a massa dos léptons e dos quarks ( $m_{\mu,q} \rightarrow 0$ ), e substituir os momentos das partículas pelas variáveis de Mandelstam conforme o Ap. A.4. Após muita conta, fazendo todas as simplificações os coeficientes dos termos proporcionais a  $1/M_Z^2$  e  $1/M_Z^4$  acabam se anulando e ficamos com:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{s,s'} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{12} \left( \frac{G_F M_Z^2}{\sqrt{2}} \right)^2 \left( \frac{4}{q^2 - M_Z^2} \right)^2 \\ &\times \left\{ (g_L^{q^2} g_L^{e^2} + g_R^{q^2} g_R^{e^2}) \hat{u}^2 + (g_L^{q^2} g_R^{e^2} + g_R^{q^2} g_L^{e^2}) \hat{t}^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde introduzimos também um fator de  $1/3$  referente ao fator de cor dos pártons iniciais do processo que havia sido omitido dos cálculos até então.



### 3.2.2 Seção de Choque Partônica

Uma vez obtido o elemento de matriz invariante, podemos retornar a eq. 3.3. No centro de momento, os quadrimomentos dos prótons  $A$  e  $B$  são, respectivamente:

$$\begin{aligned} P_A &= (E, 0, 0, E) \\ P_B &= (E, 0, 0, -E) \end{aligned} \quad (3.17)$$

sendo

$$\begin{aligned} s &= (P_A + P_B)^2 \\ &= 4E^2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Uma vez que os pártons iniciais carregam fração de momento  $x_A$  e  $x_B$  de seus respectivos prótons, considerando que seu momento é colinear com o dos prótons, e sendo o quadrimomento  $q$  do bóson  $Z$  dado por:

$$q = p_A + p_B = p_C + p_D \quad (3.19)$$

é fácil mostrar que:

$$q^2 = x_A x_B s = \hat{s} \quad (3.20)$$

Sendo os momentos dos léptons espalhados por um ângulo  $\theta$  em relação ao feixe das partículas incidentes podemos mostrar que:

$$\begin{aligned} \hat{t} &= \frac{\hat{s}}{2} (\cos \theta - 1) \\ \hat{u} &= \frac{-\hat{s}}{2} (\cos \theta + 1) \end{aligned} \quad (3.21)$$

e portanto

$$\begin{aligned} d\hat{t} &= -\frac{\hat{s}}{2} \sin \theta d\theta \\ d\Omega &= d\phi \sin \theta d\theta = \frac{-2d\phi d\hat{t}}{\hat{s}} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Fazendo todas as substituições acima na eq. 3.3, assim como  $E_{CM}^2 = \hat{s}$  ficamos com:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\phi d\hat{t}} = -\frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi^2 \hat{s}} \quad (3.23)$$

onde:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{4}{3} \left( \frac{G_F M_Z^2}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{\left( g_L^{q^2} g_L^{\epsilon^2} + g_R^{q^2} g_R^{\epsilon^2} \right) \hat{u}^2 + \left( g_L^{q^2} g_R^{\epsilon^2} + g_R^{q^2} g_L^{\epsilon^2} \right) \hat{t}^2}{(\hat{s} - M_Z^2)^2} \quad (3.24)$$

Para eliminar a divergência em  $\hat{s} = M_Z^2$  substituímos a massa do propagador utilizando a definição de massa de Breit-Wigner

$$\frac{1}{\hat{s} - M_Z^2} \rightarrow \frac{1}{\hat{s} - M_Z^2 + i M_Z \Gamma_Z} \quad (3.25)$$

onde  $\Gamma_Z$  é a taxa de decaimento do bóson Z. Essa definição é válida para partículas instáveis desde que  $\Gamma_Z \ll M_Z$ , de fato  $M_Z = 91,1875 \pm 0,0021 \text{ GeV}$  e  $\Gamma_Z = 2,4952 \pm 0,0023 \text{ GeV}$  conforme [34].

A interpretação desse mecanismo é que, satisfeita a condição  $\Gamma_Z \ll M_Z$ , na região da ressonância a partícula pode ser tratada como se estivesse na camada de massa (*on-shell*, ou de baixa virtualidade) e assim não pode haver interferência entre a produção e o decaimento, uma vez que estes processos correspondem a dois diagramas diferentes, e a partícula não pode ser considerada real para os dois diagramas, sobrando assim sempre uma contração. Assim:

$$\frac{1}{(\hat{s} - M_Z^2 + i M_Z \Gamma_Z)^2} = \frac{1}{(\hat{s} - M_Z^2)^2 + (M_Z \Gamma_Z)^2} \quad (3.26)$$

Ficamos então com a seção de choque partônica diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}}{d\phi d\hat{t}} &= - \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi^2 \hat{s}^2} \\ &= - \frac{1}{24\pi^2 \hat{s}^2} \left( \frac{G_F M_Z^2}{\sqrt{2}} \right)^2 \\ &\quad \times \frac{\left( g_L^{q^2} g_L^{\epsilon^2} + g_R^{q^2} g_R^{\epsilon^2} \right) \hat{u}^2 + \left( g_L^{q^2} g_R^{\epsilon^2} + g_R^{q^2} g_L^{\epsilon^2} \right) \hat{t}^2}{(\hat{s} - M_Z^2)^2 + (M_Z \Gamma_Z)^2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Reproduzimos o resultado conhecido da literatura. Podemos ainda substituir  $\hat{u} = -\hat{s} - \hat{t}$  e integrar  $\phi$  de 0 a  $2\pi$  e  $\hat{t}$  de 0 até  $-\hat{s}$  obtendo:

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{36\pi} \left( \frac{G_F M_Z^2}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{\hat{s}(g_R^{q^2} + g_L^{\epsilon^2})(g_R^{\epsilon^2} + g_L^{\epsilon^2})}{(\hat{s} - M_Z^2)^2 + (M_Z \Gamma_Z)^2} \quad (3.28)$$

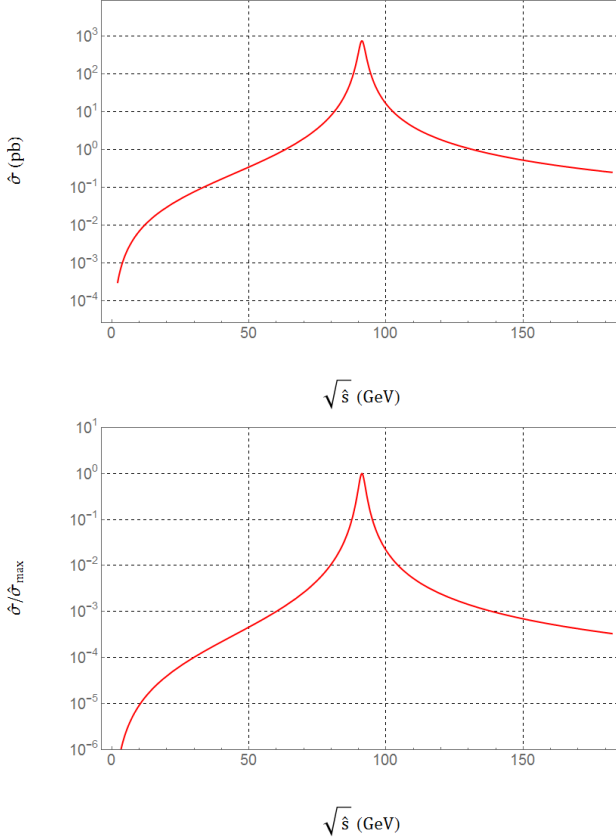


Figura 3.5: Acima temos a seção de choque partônica para o processo  $u\bar{u} \rightarrow Z^0 \rightarrow \mu\bar{\mu}$  em ordem dominante em função da massa de dilepton. Abaixo a seção de choque do mesmo processo normalizada com o valor máximo da curva superior, sendo este 766,244 pb em  $\sqrt{\hat{s}} = 91,2047$  GeV, valor correspondente ao esperado da massa do bóson Z.

A seção de choque hadrônica poderia ser calculada integrando a seção de choque partônica obtida com os PDFs conforme a Eq. 2.23, que foge do escopo desse trabalho.

No gráfico da Fig. 3.5 mostramos a seção de choque partônica para o processo  $u\bar{u} \rightarrow Z^0 \rightarrow \mu\bar{\mu}$  em ordem dominante em função da massa de dilepton, podemos ver que na região da ressonância  $\hat{s} = M_Z^2$  temos a maior seção de choque, como era esperado. Os resultados obtidos

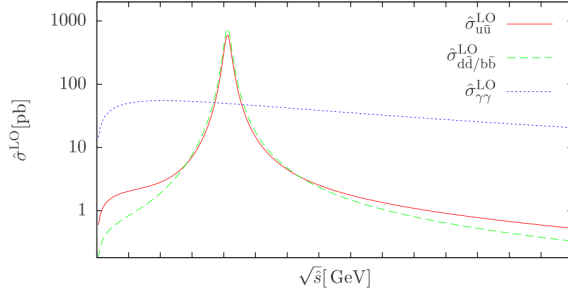


Figura 3.6: Seção de choque partônica no processo Drell-Yan em ordem dominante, imagem retirada de [35]

são compatíveis com os encontrados em outros trabalhos [35, 36] como mostrado na Fig. 3.6, com pequenas diferenças nos valores devido ao termo de interferência que foi desconsiderado. O gráfico da Fig. 2.4, que é um resultado experimental para o processo  $e^+e^- \rightarrow \text{hádrons}$ , pode também ser utilizado de forma qualitativa para observar a dominância da produção de Z na região da ressonância, onde a seção de choque aumenta quase 3 ordens de grandeza.



## 4 Conclusão

Nesse trabalho, no capítulo 2 fizemos uma revisão do modelo padrão e suas principais características. No que se refere à Cromodinâmica Quântica, explicamos a visão atual sobre a estrutura dos hádrons — mais especificamente o próton — compostos pelos quarks de valência e o mar de quarks. Vimos que o conceito de confinamento da carga de cor é essencial para justificar o curto alcance das interações da força forte e possibilita a utilização do teorema da fatorização no estudo de certos processos, assim como a propriedade de liberdade assintótica, relacionado com o parâmetro de acoplamento entre os quarks e glúons  $\alpha_S$  que tende a zero para energias muito altas, o que permite considerar os quarks como se estivessem livres nessas condições. O teorema da fatorização permite separar os processos da QCD em duas partes, uma perturbativa que pode ser mais facilmente calculável e outra não perturbativa, que seria difícil de modelar/calcular inteiramente a partir dos fundamentos da QCD, e que geralmente pode ser obtida experimentalmente. No caso das colisões entre prótons a parte não perturbativa do processo está relacionada com as distribuições dos seus constituintes internos na forma das PDFs.

Em relação as interações eletrofracas, discutimos brevemente como os parâmetros de acoplamento da teoria unificada dão origem as massas dos bósons da teoria fraca, e apresentamos o diagrama de Feynman correspondente ao vértice  $f\bar{f}Z^0$  de forma a ilustrar as quebras na simetria quiral entre os acoplamentos entre partículas com quiralidade positiva e negativa. Ainda nesse capítulo apresentamos o Modelo de Pártons e seu desenvolvimento a partir do espalhamento profundamente inelástico (DIS) e sua relação com as funções de estrutura dos prótons na forma das PDFs, posteriormente aplicamos o modelo de pártons ao processos de produção de pares leptônicos massivos a partir de colisões hadrônicas — o Processo Drell-Yan — aplicando o teorema da fatorização.

No Capítulo 3 aplicamos tudo o que foi discutido no cálculo da seção de choque do processo Drell-Yan em ordem dominante na

região da ressonância  $Q \equiv M_z$ , começando pelo cálculo do elemento de matriz invariante, termo que entra na seção de choque partônica e que por sua vez compõe o cálculo da seção de choque hadrônica com as PDFs. A seção de choque partônica em sua forma diferencial pode ser expressa em termos de diferentes variáveis cinemáticas, como  $Q^2$  e  $Y$  ou  $\hat{t}$  e  $\phi$ , por exemplo. Distribuições para os espalhamentos em funções dessas variáveis estão disponíveis em diversos artigos das colaborações envolvidas com os grandes colisores como o LHC e podem ser utilizadas para obter a seção de choque hadrônica a partir da integração dessas variáveis ou então obter a seção de choque hadrônica integrando com as PDFs.

Há a perspectiva de cálculo de outros observáveis. Por exemplo, no LHCb foi medida a seção de choque de um bóson Z ou um fóton virtual associado à jatos de quark  $b$  na região frontal em colisões de próton-próton à 7 TeV no centro de momento [37]. Para os jatos de  $b$  duas regiões de momento transversal foram consideradas (10 GeV e 20 GeV). As seções de choque medidas foram  $295 \pm 60 \pm 51 \pm 10$  para  $p_T(\text{jato}) > 10 \text{ GeV}$  e  $128 \pm 36 \pm 22 \pm 5$  para  $p_T(\text{jato}) > 20 \text{ GeV}$ , onde as fontes de incertezas são estatística, sistemática, e da luminosidade do feixe, respectivamente. Ambos os resultados estão de acordo com as previsões teóricas.

Em outra análise do LHCb [38] foi estudada a produção associada de um bóson Z com um méson D na região frontal com apenas 11 eventos selecionados, foi medido uma seção de choque de  $2,50 \pm 1,12 \pm 0,22$  pb na produção de Z com  $D^0$ , e  $0,44 \pm 0,23 \pm 0,03$  pb para Z com  $D^+$ , onde a primeira incerteza é estatística e a segunda sistemática. Os resultados são consistentes com a previsões teóricas para o primeiro caso, mas estão abaixo do valor esperado no segundo. Esse processo é interessante porque inclui a força fraca e a força forte nos mesmos diagramas de Feynman e a interpretação dos resultados não é satisfatória.

A produção associada de Z com c ou b pode ter duas origens: o espalhamento simples de pártons e o espalhamento duplo de pártons. No espalhamento simples apenas um párton de cada hádron interagem entre si e a seção de choque de Z em ordem dominante pode ser calculada como fizemos para o processo Drell–Yan. No espalhamento duplo há duas interações simultâneas, em cada uma um párton de cada hádron participa, totalizando quatro pártons [39]. Em uma das interações o bóson vetorial será criado; na outra, o quark pesado. Para energias do LHC este é o modo de produção dominante no caso o quark charm, enquanto que no caso do quark bottom o espalhamento simples é

numericamente maior. Entender a dinâmica que determina qual a maior contribuição é um problema em aberto da área, pois a fatorização em casos de espalhamentos duplos não está estabelecida teoricamente.

Com estes resultados e eventualmente outros, com a volta das operações no LHC com energias de 13 TeV, podem-se estudar os processos de produção da partícula Z em associação com um quark pesado (charm ou bottom) no Grande Colisor de Hádrons. Para melhorar os resultados também pode-se estudar a produção isolada de Z por meio da interação eletrofraca nas ordens seguintes a dominante e assim como o entendimento das distribuições de pártons e suas contribuições para os diversos observáveis.





## Referências Bibliográficas

- [1] E. Rutherford M.A. B.Sc. Viii. uranium radiation and the electrical conduction produced by it. *Philosophical Magazine Series 5*, 47(284):109–163, 1899.
- [2] E. Rutherford M.A. D.Sc. Xv. the magnetic and electric deviation of the easily absorbed rays from radium. *Philosophical Magazine Series 6*, 5(26):177–187, 1903.
- [3] J. Chadwick. Possible Existence of a Neutron. *Nature*, 129:312, 1932.
- [4] Murray Gell-Mann. A Schematic Model of Baryons and Mesons. *Phys. Lett.*, 8:214–215, 1964.
- [5] G. Zweig. An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 1. 1964.
- [6] V. E. Barnes et al. Observation of a hyperon with strangeness minus three. *Phys. Rev. Lett.*, 12:204–206, Feb 1964.
- [7] T W B Kibble. History of electroweak symmetry breaking. *Journal of Physics: Conference Series*, 626(1):012001, 2015.
- [8] G. Aad, T. Abajyan, B. Abbott, J. Abdallah, S. Abdel Khalek, A. A. Abdelalim, O. Abdinov, R. Aben, B. Abi, M. Abolins, and et al. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Physics Letters B*, 716:1–29, September 2012.
- [9] Serguei Chatrchyan et al. Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC. *Phys. Lett.*, B716:30–61, 2012.
- [10] Ahmed Ali, Christian Hambrock, and M. Jamil Aslam. A Tetraquark interpretation of the BELLE data on the anomalous Upsilon(1S) pi+pi- and Upsilon(2S) pi+pi- production near the Upsilon(5S) resonance. *Phys.Rev.Lett.*, 104:162001, 2010.

- [11] Eric Swanson. New Particle Hints at Four-Quark Matter. *APS Physics*, 6:69, 2013.
- [12] David Griffiths. *Introduction to elementary particles*. 2008.
- [13] K.A. Olive et al. Review of Particle Physics. *Chin. Phys.*, C38:090001, 2014 and 2015 update.
- [14] Fred L. Wilson. Fermi’s theory of beta decay. *American Journal of Physics*, 36(12):1150–1160, 1968.
- [15] Nobel Media AB. The nobel prize in physics 1984. nobelprize.org. [http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1984/](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1984/). Accessed August 31, 2016.
- [16] S. Schael et al. Precision electroweak measurements on the  $Z$  resonance. *Phys. Rept.*, 427:257–454, 2006.
- [17] Rutherford E. The scattering of  $\alpha$  and  $\beta$  particles by matter and the structure of the atom. *Philosophical Magazine Series 6*, 21(125):669–688, 1911.
- [18] W. Albrecht, H. J. Behrend, F. W. Brasse, W. Flauger, H. Hultschig, and K. G. Steffen. Elastic electron-proton scattering at momentum transfers up to  $245\text{ f}^{-2}$ . *Phys. Rev. Lett.*, 17:1192–1195, Dec 1966.
- [19] M.D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Quantum Field Theory and the Standard Model. Cambridge University Press, 2014.
- [20] A. De Roeck and R. S. Thorne. Structure Functions. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 66:727–781, 2011.
- [21] J. D. Bjorken. Asymptotic sum rules at infinite momentum. *Phys. Rev.*, 179:1547–1553, Mar 1969.
- [22] J. D. Bjorken and E. A. Paschos. Inelastic electron-proton and  $\gamma$ -proton scattering and the structure of the nucleon. *Phys. Rev.*, 185:1975–1982, Sep 1969.
- [23] Richard P. Feynman. Very high-energy collisions of hadrons. *Phys. Rev. Lett.*, 23:1415–1417, Dec 1969.
- [24] Sidney D. Drell, Donald J. Levy, and Tung-Mow Yan. A field-theoretic model for electron-nucleon deep inelastic scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 22:744–749, Apr 1969.

- [25] Sidney D. Drell, Donald J. Levy, and Tung-Mow Yan. Theory of deep-inelastic lepton-nucleon scattering and lepton-pair annihilation processes. i. *Phys. Rev.*, 187:2159–2171, Nov 1969.
- [26] Sidney D. Drell, Donald J. Levy, and Tung-Mow Yan. Theory of deep-inelastic lepton-nucleon scattering and lepton pair annihilation processes. ii. deep-inelastic electron scattering. *Phys. Rev. D*, 1:1035–1068, Feb 1970.
- [27] H. Abramowicz et al. Combination of measurements of inclusive deep inelastic  $e^\pm p$  scattering cross sections and QCD analysis of HERA data. *Eur. Phys. J.*, C75(12):580, 2015.
- [28] Sidney D. Drell and Tung-Mow Yan. Massive lepton-pair production in hadron-hadron collisions at high energies. *Phys. Rev. Lett.*, 25:316–320, Aug 1970.
- [29] Sidney D. Drell and Tung-Mow Yan. Massive lepton-pair production in hadron-hadron collisions at high energies. *Phys. Rev. Lett.*, 25:902–902, Sep 1970.
- [30] Jan Finjord. Drell-yan production of intermediate vector bosons. *Nuclear Physics B*, 131(4):507 – 518, 1977.
- [31] C. Patrignani and Particle Data Group. Review of particle physics. *Chinese Physics C*, 40(10):100001, 2016.
- [32] U. Baur, O. Brein, W. Hollik, C. Schappacher, and D. Wackerroth. Electroweak radiative corrections to neutral current Drell-Yan processes at hadron colliders. *Phys. Rev.*, D65:033007, 2002.
- [33] M.E. Peskin and D.V. Schroeder. *An Introduction To Quantum Field Theory*. Frontiers in physics. Westview Press, 1995.
- [34] S. Schael et al. Precision electroweak measurements on the  $Z$  resonance. *Phys. Rept.*, 427:257–454, 2006.
- [35] Stefan Dittmaier and Max Huber. Radiative corrections to the neutral-current drell-yan process in the standard model and its minimal supersymmetric extension. *Journal of High Energy Physics*, 2010(1):60, 2010.
- [36] Carlo M. Carloni Calame, Guido Montagna, Oreste Nicrosini, and Alessandro Vicini. Precision electroweak calculation of the production of a high transverse-momentum lepton pair at hadron colliders. *Journal of High Energy Physics*, 2007(10):109, 2007.

- [37] Roel Aaij et al. Measurement of the Z+b-jet cross-section in pp collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV in the forward region. *JHEP*, 1501:064, 2015.
- [38] Roel Aaij et al. Observation of associated production of a Z boson with a D meson in the forward region. *JHEP*, 1404:091, 2014.
- [39] Aneesh V. Manohar and Wouter J. Waalewijn. What is Double Parton Scattering? *Phys.Lett.*, B713:196–201, 2012.
- [40] J. Greensite, editor. *An Introduction to the Confinement Problem*, volume 821 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, 2011.
- [41] Tung-Mow Yan and Sidney D. Drell. The Parton Model and its Applications. *Int. J. Mod. Phys.*, A29:0071, 2014.
- [42] O. W. Greenberg. The Parton model. In *Compendium of Quantum Physics*, ed. D. Greenberger, K. Hentschel and F. Weinert, (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009), 255-258, 2008.
- [43] Michael R. Pennington. Evolving images of the proton: Hadron physics over the past 40 years. *J. Phys.*, G43:054001, 2016.
- [44] John C. Collins, Davison E. Soper, and George F. Sterman. Factorization of Hard Processes in QCD. *Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.*, 5:1–91, 1989.
- [45] C. M. Carloni Calame, G. Montagna, O. Nicrosini, and A. Vicini. Precision electroweak calculation of the production of a high transverse-momentum lepton pair at hadron colliders. *JHEP*, 10:109, 2007.
- [46] L. A. Harland-Lang, A. D. Martin, P. Motylinski, and R. S. Thorne. Parton distributions in the lhc era: Mmht 2014 pdfs. 2014.
- [47] F Jegerlehner. Quantum chromodynamics and strong interaction physics. *Lectures given at University of Silesia, Katowicw, Poland*, 2009.
- [48] Steven Weinberg. The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations. 1995.
- [49] Steven Weinberg. The quantum theory of fields. Vol. 2: Modern applications. 1996.

- [50] Steven Weinberg. The quantum theory of fields. Vol. 3: Supersymmetry. 2000.
- [51] John M. Campbell and R.K. Ellis. MCFM for the Tevatron and the LHC. *Nucl.Phys.Proc.Suppl.*, 205-206:10–15, 2010.
- [52] Vladimir Kuksa. Complex-mass definition and the structure of unstable particle’s propagator. *Adv. High Energy Phys.*, 2015:490238, 2015.
- [53] Antonio Pich. The Standard model of electroweak interactions. In *High-energy physics. Proceedings, European School, Aronsborg, Sweden, June 18-July 1, 2006*, pages 1–49, 2007. [1(2007)].
- [54] C.H. Llewellyn Smith and D.V. Nanopoulos. Remarks on neutral current phenomenology. *Nuclear Physics B*, 78(2):205 – 221, 1974.
- [55] Vladimir A. Zykunov. Weak radiative corrections to the drell-yan process for large invariant mass of a dilepton pair. *Phys. Rev. D*, 75:073019, Apr 2007.
- [56] Chris Quigg. *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions*. Princeton University Press, USA, 2013.
- [57] F. Halzen and A.D. Martin. *Quarks and leptons: an introductory course in modern particle physics*. Wiley, 1984.
- [58] D. Bailin and A. Love. *Introduction to Gauge Field Theory Revised Edition*. Graduate Student Series in Physics. Taylor & Francis, 1993.
- [59] Walter Greiner and Berndt Müller. *Gauge theory of weak interactions; 2nd ed.* Springer, Berlin, 1996. Foreword by D A Bromley.
- [60] D.C. Cheng and G.K. O’Neill. *Elementary particle physics: an introduction*. The Advanced Book Program. Addison-Wesley, Advanced Book Program, 1979.
- [61] K. A. Olive et al. Review of Particle Physics. *Chin. Phys.*, C38:090001, 2014.
- [62] F. Halzen and Alan D. Martin. Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics. 1984.



## Apêndice

Neste apêndice encontram-se as principais relações matemáticas utilizadas ao longo do trabalho.

### A.1 Matrizes de Pauli

As matrizes da Pauli formam uma base para o grupo  $SU(2)$ , que é o grupo de simetria ao qual pertence o  $Spin/Isospin-\frac{1}{2}$ .

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ,$$

e satisfazem a relações

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{1}_{2\times 2}$$

### A.2 Espinores e Matrizes de Dirac

As matrizes de Dirac devem satisfazer

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad ,$$

sendo possível diversas representações, uma das mais comuns é a representação de Weyl:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & \mathbb{1}_{2\times 2} \\ \mathbb{1}_{2\times 2} & \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \end{pmatrix} \quad ,$$

onde  $\sigma_i$  ( $i = 0, 2, 3$ ) são as matrizes de Pauli.

Outra matriz importante é a  $\gamma_5$  definida

$$\gamma_5 \equiv -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$



Para os espinores definimos a operação

$$\bar{u} \equiv u^\dagger \gamma^0 \quad ,$$

que satisfaz as propriedades

$$\sum_{spins} u \bar{u} = \not{p} + m \qquad \sum_{spins} v \bar{v} = \not{p} - m \quad ,$$

onde definimos

$$\not{p} = p_\mu \gamma^\mu \quad .$$

Algumas propriedades relacionadas as matrizes de Dirac:

$$\gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\mu$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$$

$$(\gamma^5)^2 = 1$$

$$P_\pm^\dagger = P_\pm$$

$$P_\pm \gamma^0 = \gamma^0 P_\mp \quad .$$

### A.3 Operador Traço

Propriedades do operador traço:

$$\text{Tr} \{A + B\} = \text{Tr} \{A\} + \text{Tr} \{B\}$$

$$\text{Tr} \{AB\} = \text{Tr} \{BA\}$$

Identidades do operador traço com as matrizes de Dirac:

$$\text{Tr} \{\gamma^\mu\} = 0$$

$$\text{Tr} \{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho\}^1 = 0$$

$$\text{Tr} \{\gamma^5\} = \text{Tr} \{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5\} = 0$$

$$\text{Tr} \{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^5\}^2 = 0$$

$$\text{Tr} \{\gamma^\mu \gamma^\nu\} = 4\eta^{\mu\nu}$$

$$\text{Tr} \{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma\} = 4(\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho})$$

$$\text{Tr} \{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5\} = -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

---

<sup>1</sup>O traço da multiplicação de qualquer número ímpar de matrizes de Dirac é sempre nulo.

<sup>2</sup>O traço da multiplicação de uma quantidade ímpar de matrizes de Dirac com uma  $\gamma^5$  é sempre nulo.

#### A.4 Variáveis de Mandelstam

Variáveis de Mandelstam são definidas:

$$\begin{aligned}s &= (p_a + p_b)^2 = (p_c + p_d)^2 = q^2 \\ t &= (p_a - p_c)^2 = (p_b - p_d)^2 \\ u &= (p_a - p_d)^2 = (p_b - p_c)^2\end{aligned}$$

No limite ( $q \rightarrow \infty, m_{\mu, q} \rightarrow 0$ ) as seguintes aproximações são válidas:

$$\begin{aligned}s &\approx 2(p_a p_b) \approx 2(p_c p_d) \\ t &\approx -2(p_a p_c) \approx -2(p_b p_d) \\ u &\approx -2(p_a p_d) \approx -2(p_b p_c) \\ s + t + u &\approx 0\end{aligned}$$